עבודת קיץ במתמטיקה לעולים לי"א 5 יחידות

הנחיות:

לימודי המתמטיקה בחמש יחידות מחייבים אותנו להתחיל את שנת הלימודים הבאה כהמשך ישיר לשנה החולפת, כלומר אנו מצפים מכם כבר ב- 1.9 להפגין שליטה טובה בנושאים ובמיומנויות שנלמדו במהלך השנה הזו.

כדי לאפשר לכם לשמור על רמת הידע (או להשלים לפי הצורך), אספנו לכם תרגילים בנושאים השונים.

- בתחילת השנה יתקיים מבחן שיתבסס ברובו על הנושאים שבעבודה.
- התרגילים נלקחו מספרי הלימוד של יואל גבע וכן מעבודה ייעודית שפורסמה על ידי הוצאת הספרים שלו.
- התרגילים מגוונים ודורשים שליטה במיומנויות שונות.
- התרגילים אינם מדורגים לפי רמת קושי. אין חובה לפתור את כולם אך מומלץ כמה שיותר.
- מומלץ לפתור באופן מסודר ולשמור את הפתרונות שלכם, כדי שתוכלו להיעזר בהם לצורך חזרה למבחן שיהיה.

תוכן העניינים:

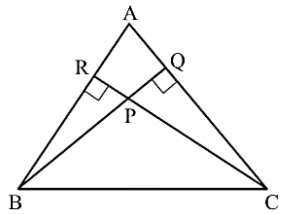
בהצלחה,

מיכל, לילך, חופית וקרן.

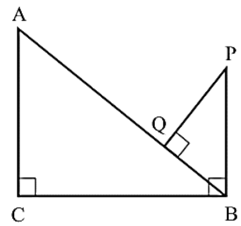
חלק א – גאומטריה – דמיון משולשים ופרופורציות

דמיון משולשים:

.1 CR ו- BQ הם גבהים במשולש ABC
הנפגשים בנקודה P .
א. הוכח: $\Delta BRP \sim \Delta CQP$.
ב. הוכח: $CP \cdot PR = BP \cdot PQ$.

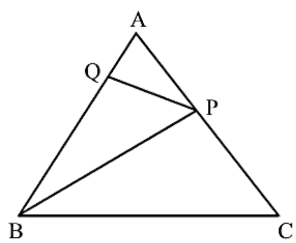


.2 בציור שלפניך נתון: $AC \perp BC$,
$BP \perp BC$, $PQ \perp AB$.
א. הוכח: $AC \cdot BP = AB \cdot BQ$.
ב. נתון: $BP =$ 5 ס״מ , $AC =$ 6 ס״מ ,
$AQ =$ 7 ס״מ .
חשב את היקף המשולש BPQ .

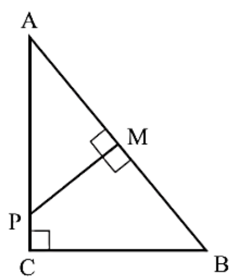


תשובה: ב. 12 ס״מ.

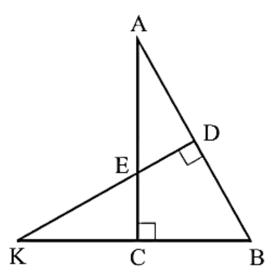
.3 BP הוא חוצה-זווית של $\sphericalangle ABC$ במשולש ABC .
Q היא נקודה על הצלע AB .
נתון: $\sphericalangle BPQ = \sphericalangle ACB$.
א. הוכח: $\Delta APQ \sim \Delta ABP$.
ב. הוכח: $AP^2 = AQ \cdot AB$.



.4 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\sphericalangle C = 90^\circ)$.
MP , האנך האמצעי ליתר AB ,
חותך את הניצב AC בנקודה P .
א. הוכח: $\Delta AMP \sim \Delta ACB$.
ב. הוכח: $AP \cdot AC = 2 \cdot AM^2$.

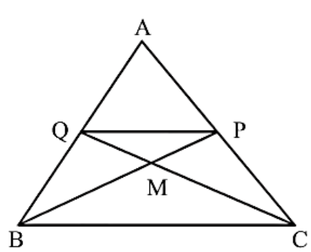


.5 המשולש ABC הוא ישר-זווית $(AC \perp BC)$.
KD מאונך ל- AB . נתון: $ED =$ 3 ס״מ ,
$KE =$ 5 ס״מ , $AB =$ 10 ס״מ , $AD > BD$.
חשב את אורך הקטע AD .



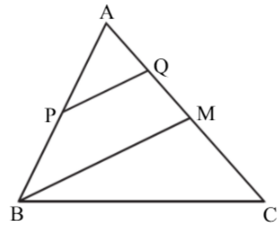
תשובה: 6 ס״מ.

.6 BP ו- CQ הם תיכונים במשולש ABC
הנפגשים בנקודה M .
א. הוכח: $\Delta AQP \sim \Delta ABC$.
ב. הוכח: $\Delta PQM \sim \Delta BCM$.

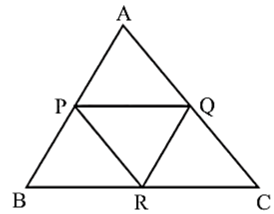


7. בציור שלפניך נתון: $\sphericalangle AQP = \sphericalangle ABC$,
$AC =$ 18 ס"מ, $PB = AP =$ 6 ס"מ,
$BM \parallel PQ$.
חשב את אורך הקטע MC.

תשובה: 10 ס"מ.

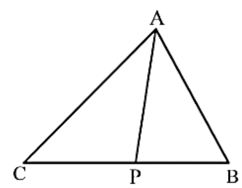


8. במשולש ABC הנקודות P, Q ו- R
הן אמצעי הצלעות AB, AC ו- BC.
הוכח: $\Delta ABC \sim \Delta RQP$.



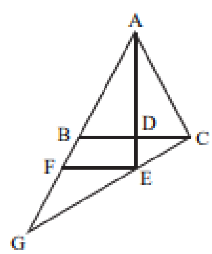
9. בציור שלפניך נתון: $AC =$ 30 ס"מ, $AB =$ 24 ס"מ,
$PB =$ 16 ס"מ, $CP =$ 20 ס"מ.
א. הוכח: AP חוצה את הזווית BAC.
ב. הוכח: $\Delta ABP \sim \Delta CBA$.
ג. חשב את אורך הקטע AP.

תשובה: ג. 20 ס"מ.

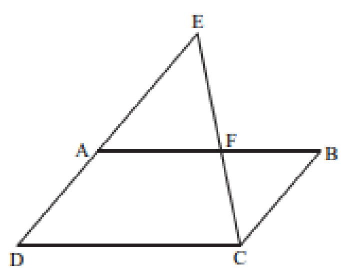


פרופורציה:

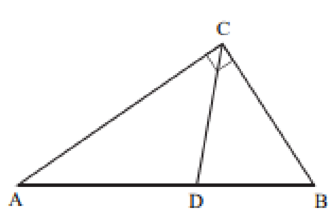
10. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש
שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$.
G היא נקודה על המשך הצלע AB.
הקטע FE מקביל ל- BC.
נתון: $\frac{AG}{AC} = \frac{GF}{BF}$. הוכח: $AE \perp BC$.



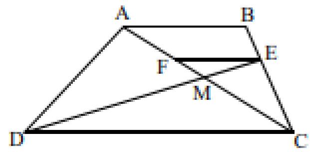
11. המרובע $ABCD$ הוא מקבילית (ראה ציור).
א. הוכח: $\frac{AD}{AE} = \frac{BF}{FA}$.
ב. (1) הוכח: $\frac{S_{\Delta ADF}}{S_{\Delta AEF}} = \frac{AD}{AE}$
(2) היעזר בסעיף א' ובתת סעיף ב' (1),
והוכח: $S_{\Delta ADF} = S_{\Delta BEF}$.



12. במשולש ישר-זווית ACB $(\sphericalangle ACB = 90^\circ)$
CD חוצה-זווית ACB (ראה ציור).
א. (1) הוכח: $DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$.
(2) נתון: $BC =$ 21 מ"מ, $AC =$ 28 מ"מ.
חשב את האורך של הקטע DB.
ב. מקדקוד C מורידים אנך ליתר AB.
האנך חותך את היתר
בנקודה N. הוכח כי $\frac{BC}{AB} = \frac{CN}{AC}$.
ג. חשב את האורך של הקטע DN.



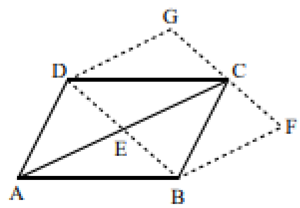
13. בטרפז ABCD $(AB \parallel DC)$ מתקיים $DC = 2AB$.
הנקודה E נמצאת על השוק BC כך ש- $BC = 3BE$.
הנקודה F נמצאת על האלכסון AC
כך ש- $FE \parallel DC$. האלכסון AC והקטע DE
נחתכים בנקודה M .



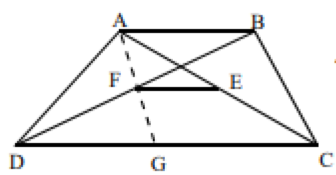
א. חשב את היחסים: (1) $\frac{FE}{AB}$. (2) $\frac{FE}{DC}$.
ב. הוכח: $MC = 3FM$.
ג. חשב את היחס $\frac{AM}{MC}$.

תשובה: א. (1) $\frac{2}{3}$. (2) $\frac{1}{3}$. ג. $\frac{AM}{MC} = 1$.

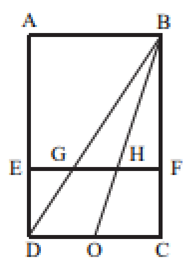
14. המרובעים ABCD ו- BFGD הם מקביליות.
נתון: $CG = CF$ (C על הקטע GF).
א. הוכח: המרובע ECGD הוא מקבילית.
ב. הוכח: אם המקבילית ABCD היא מעוין,
אז המרובע ECGD הוא מלבן.



15. בטרפז ABCD $(AB \parallel DC)$ הנקודות E ו- F
הן אמצעי האלכסונים AC ו- BD , בהתאמה.
המשך הקטע AF חותך את DC בנקודה G .
א. הוכח: $FE \parallel DC$.
ב. הוכח: $S_{ADG} = S_{ABD}$.

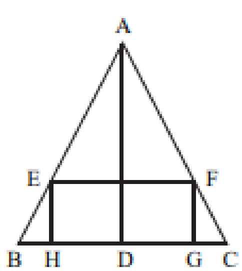


16. הנקודה O היא אמצע הצלע DC של מלבן ABCD .
EF מקביל ל- DC וחותך את BD ואת BO
בנקודות G ו- H (ראה ציור).
א. הוכח: $GH = HF$.
ב. נתון גם: $EG = GH$. מצא את היחס $\frac{FC}{BF}$.



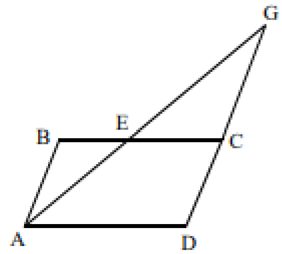
תשובה: ב. $\frac{1}{2}$.

17. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$
חסום מלבן EFGH , כך שהאלכסון HF
מאונך לשוק AC . AD הוא תיכון
לבסיס BC . נתון: $AD = BC$.
א. הוכח: $\frac{GC}{FG} = \frac{1}{2}$.
ב. הוכח: $\Delta HGF \sim \Delta FGC$.
ג. נתון: $HG = 10$ ס"מ . מצא את GC .



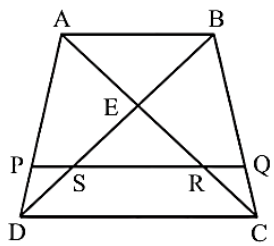
תשובה: ג. 2.5 ס"מ.

18. במקבילית ABCD נקודה E נמצאת על הצלע BC, כך ש- $\frac{BE}{CE}=\frac{a}{b}$.
המשך הקטע AE חותך את המשך הצלע DC
בנקודה G. נתון כי שטח המשולש CEG
הוא S. הבע באמצעות a, b ו- S:
א. את שטח המשולש ABE.
ב. חשב את שטח המשולש ADG.
ג. את שטח המקבילית ABCD.



תשובה: א. $\frac{a^2S}{b^2}$. ב. $\frac{(a+b)^2S}{b^2}$. ג. $\frac{2a(a+b)S}{b^2}$.

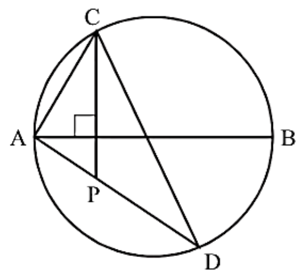
19. בטרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ נתון: $PQ \parallel CD$,
$DC =$ 18 ס״מ, $AB =$ 12 ס״מ,
$DP =$ 3.5 ס״מ, $PA =$ 10.5 ס״מ.
חשב את היחס $S_{ERS} : S_{EAB}$.



תשובה: $\frac{49}{64}$.

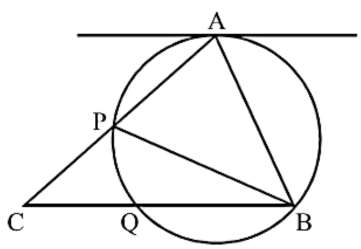
חלק ב – גאומטריה – מעגל

1. AB הוא קוטר במעגל. C ו- D נקודות על המעגל. P נקודה על AD.
CP מאונך לקוטר AB.
א. הוכח: $AC^2 = AP \cdot AD$.
ב. נתון: $AP = 18$ ס״מ, $AD = 32$ ס״מ, $CD = 40$ ס״מ.
חשב את רדיוס המעגל.

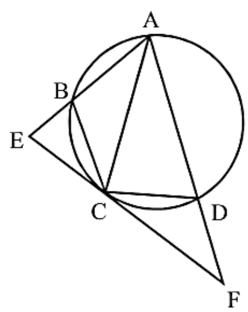


תשובה: ב. R = 20 ס"מ

2. המשכי המיתרים AP ו- BQ נפגשים בנקודה C. BC מקביל לישר המשיק למעגל בנקודה A.
א. הוכח: $AB^2 = AP \cdot AC$.
ב. הוכח: אם P אמצע AC, אז $S_{\Delta ABP} = S_{\Delta BCP}$.

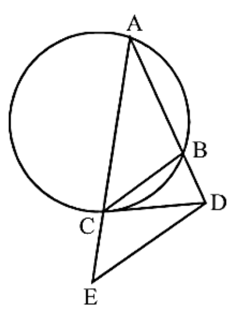


3. מרובע ABCD חסום במעגל. האלכסון AC חוצה את הזווית BAD. בנקודה C מעבירים משיק למעגל. המשכי הצלעות AB ו- AD חותכים את המשיק בנקודות E ו- F בהתאמה.
א. הוכח: $\Delta EBC \sim \Delta CDA$.
ב. נתון: $BE = 2$ ס״מ, $AD = 8$ ס״מ.
חשב את אורך הקטע BC.



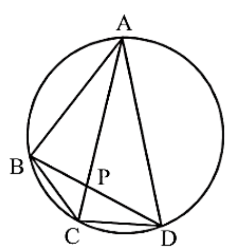
תשובה: ב. BC = 4ס"מ

4. המשולש ABC חסום במעגל.
DC משיק למעגל בנקודה C.
נתון: $DE \parallel BC$.
א. הוכח: $\Delta AED \sim \Delta DEC$.
ב. נתון: $DE = 30$ ס״מ, $CE = 18$ ס״מ.
חשב את אורך הקטע CB.



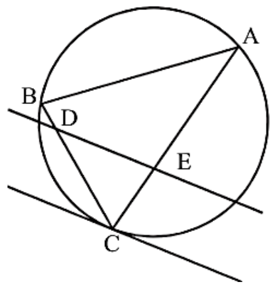
תשובה: ב. CB = 19.2 ס"מ

5. המרובע ABCD חסום במעגל.
נתון: $AB = 20$ ס״מ, $AD = 30$ ס״מ,
$BP = 8$ ס״מ, $PD = 12$ ס״מ.
א. הוכח: $BC = CD$.
ב. נסמן: O – מרכז המעגל החסום במשולש ABD.
חשב את היחס $AO : OP$.



תשובה: ב. 5:2

6. המשולש ABC חסום במעגל. E היא נקודה על צלע AC. דרך הנקודה E העבירו מקביל לישר המשיק למעגל בנקודה C.

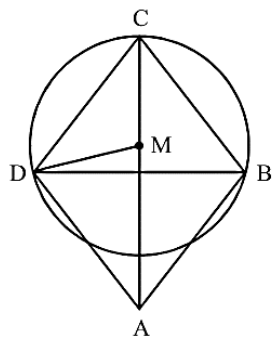


א. הוכח: $\Delta DEC \sim \Delta ABC$.

ב. נתון: $BD = 2$ ס"מ, $DC = 6$ ס"מ, $AE = 2EC$,
שטח המשולש ABC הוא S.
הבע באמצעות S את שטח המשולש DEC.

<u>תשובה</u>: ב. S/4

7. נתון מעוין $ABCD$. נקודה M נמצאת על האלכסון AC, כך ש- $MD = MC$ (ראה ציור).

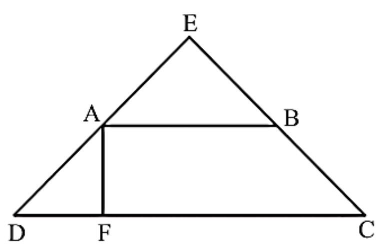


א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש DBC.

ב. נתון: רדיוס המעגל החוסם את המשולש DBC הוא 10 ס"מ, ומרחק המרכז M מהאלכסון DB הוא 1.5 ס"מ.
חשב את שטח המעוין $ABCD$.

<u>תשובה</u>: 227.4 סמ"ר

8. טרפז $ABCD$ הוא שווה-שוקיים $(AD = BC)$. AF הוא גובה הטרפז.
המשכי השוקיים של הטרפז נפגשים בנקודה E. נתון: $DA = AE$, $DC = 4AF$.



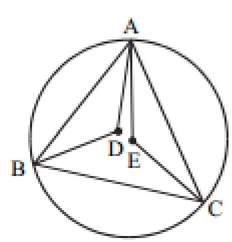
א. הוכח: המשולש DAF הוא שווה-שוקיים.

ב. נתון: $AE = 5$ ס"מ.
חשב את אורך הצלע AB. נמק.

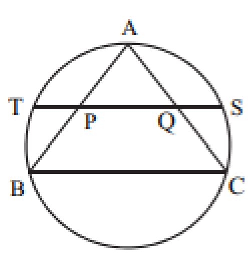
ג. היכן נמצא מרכז המעגל החוסם את המשולש DEC:
על אחת מצלעות משולש זה, בתוך משולש זה או מחוץ למשולש זה?
נמק.

<u>תשובה</u>: ב. $5\sqrt{2}$ ס"מ

9. הנקודה D היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC והנקודה E היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.
הוכח: $\sphericalangle AEC = 4 \cdot \sphericalangle ABD$.



10. המשולש שווה-השוקיים ABC $(AB = AC)$ חסום במעגל. P ו- Q הן אמצעי השוקיים AB ו- AC, בהתאמה. המשכי הקטע PQ חותכים את המעגל בנקודות T ו- S.



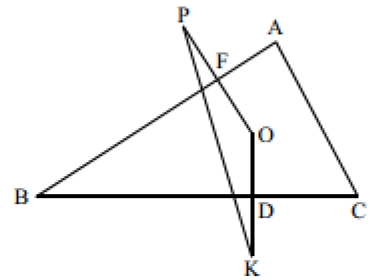
א. הוכח: $TB = SC$.

ב. הוכח: $TP = QS$.

11. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC. המעגל משיק לצלע BC בנקודה D ולצלע AB בנקודה F. המשיכו את OD עד K ואת OF עד P כך ש- $OD = DK$ ו- $OF = FP$.

א. הוכח כי $FD \perp BO$.

ב. הוכח כי $BO \perp PK$.

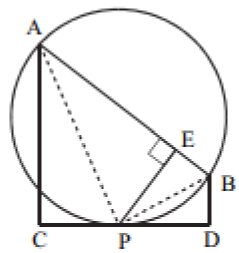


12. CD משיק למעגל בנקודה P, ו- AB הוא מיתר במעגל זה. BD ו- AC הם אנכים למשיק. PE הוא אנך מנקודת ההשקה P למיתר AB.

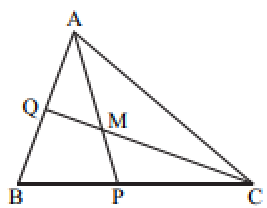
א. הוכח: $\Delta ACP \sim \Delta PEB$.

ב. הוכח: $\Delta BDP \sim \Delta PEA$.

ג. הוכח: $AC \cdot BD = PE^2$.



13. בציור שלפניך נתון: $AC =$ 40 ס"מ, $PC =$ 20 ס"מ, $BP =$ 15 ס"מ, $BQ =$ 14 ס"מ, $AQ =$ 16 ס"מ.
הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.



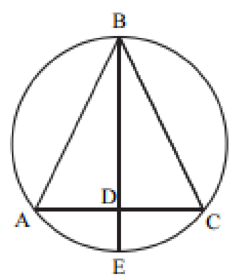
14. הנקודות E, C, B, A נמצאות על מעגל (ראה ציור). BE חוצה את הזווית ABC וחותך את המיתר AC בנקודה D.

א. הוכח כי $\Delta ABE \sim \Delta DAE$ ו- $\Delta ABE \sim \Delta DBC$.

ב. נתון: $AB = BC$.
הוכח כי BE הוא קוטר במעגל.

ג. נתון: $R =$ 25 ס"מ ו- $\frac{BD}{DE} = \frac{16}{9}$. מצא את שטח המשולש ABC.

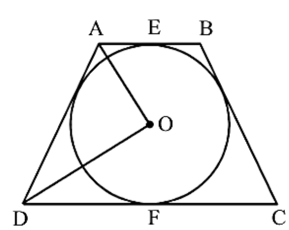
תשובה: ג. 768 סמ"ר.



15. מעגל שמרכזו בנקודה O חסום בטרפז ABCD $(AB \parallel DC)$.

א. הוכח: $\sphericalangle DOA = 90^\circ$.

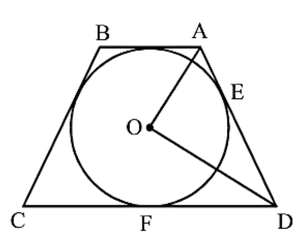
ב. E ו- F הן נקודות השקה.
הוכח: $AD = AE + DF$.



16. צלעותיו של המרובע ABCD משיקות למעגל שמרכזו O. נתון: $AO \perp DO$.

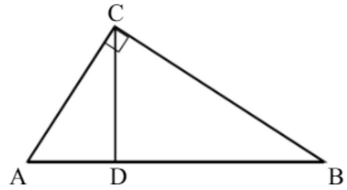
א. הוכח: $AB \parallel CD$.

ב. E ו- F הן נקודות השקה.
הוכח: $\sphericalangle BAO = \sphericalangle EFD$.



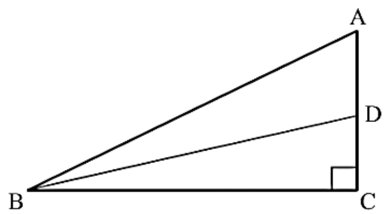
חלק ג – טריגונומטריה במישור

.1 במשולש ישר-זווית ABC נתון:
$AC \perp BC$, $AC = 21$ ס"מ , $BC = 34$ ס"מ.
א. חשב את הזווית ABC.
ב. חשב את אורך CD, הגובה ליתר.



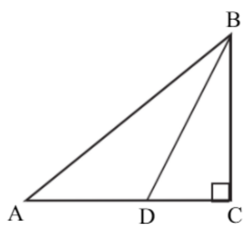
תשובה: א. 31.7°. ב. 17.87 ס"מ.

.2 BD הוא חוצה-הזווית של $\measuredangle B$
במשולש ישר-זווית ABC $(\measuredangle C = 90^\circ)$.
נתון: $\measuredangle ABC = 25^\circ$, $DC = 26.4$ ס"מ.
א. חשב את אורכו של BD.
ב. חשב את אורך היתר AB.



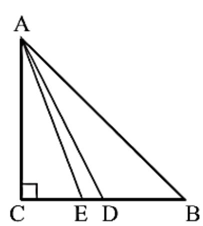
תשובה: א. 121.97 ס"מ. ב. 131.4 ס"מ.

.3 BD הוא חוצה הזווית של $\measuredangle ABC$
במשולש ישר-זווית ABC $(\measuredangle C = 90^\circ)$.
נתון: $BC = 10$ ס"מ , $\measuredangle ADB = 117^\circ$.
חשב את אורך הקטע AD.



תשובה: 8.669 ס"מ.

.4 משולש ABC הוא ישר-זווית ושווה-שוקיים
$(\measuredangle C = 90^\circ$, $CA = CB)$. אורך היתר הוא
$AB = 65.8$ ס"מ, AD הוא תיכון לצלע BC,
AE הוא חוצה-זווית של $\measuredangle CAB$.
חשב את אורך הקטע ED.

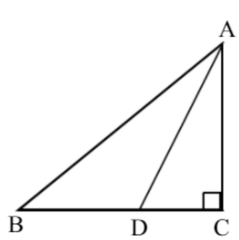


תשובה: 3.991 ס"מ.

.5 במשולש ישר-זווית ABC $(\measuredangle C = 90^\circ)$ נתון: $AC = x$, $\measuredangle A = 40^\circ$.
א. הבע על ידי x את אורך הניצב BC ואת אורך היתר AB.
ב. חשב את היחס $AB : AC$.
ג. פי כמה גדול היתר AB מהניצב BC?

תשובה: א. $0.839x$, $1.305x$. ב. 1.305. ג. 1.555.

.6 AD חוצה את הזווית BAC במשולש ישר-זווית
ABC $(\measuredangle C = 90^\circ)$. נתון: $\measuredangle B = 34^\circ$.
חשב את היחס בין אורך הקטע BD
לאורך הצלע AC.



תשובה: 0.951.

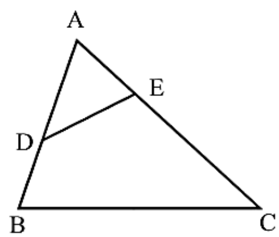
7. במשולש שווה-שוקיים אורך השוק הוא 8 ס"מ וזווית הראש היא בת 42°. חשב את שטח המשולש.

תשובה: 21.41 סמ"ר.

8. א. שטחו של משולש שווה-שוקיים הוא 80 סמ"ר.
אורך שוק המשולש הוא 14 ס"מ. חשב את זווית הראש של המשולש.
ב. שטחו של משולש שווה-שוקיים הוא 32 סמ"ר.
אורך שוק המשולש הוא 8 ס"מ. חשב את זווית הראש של המשולש.

תשובה: א. 54.72° או 125.28°. **ב.** 90°.

9. הנקודות D ו- E נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו- AC של המשולש ABC.
נתון: $AB = CE = 5$ ס"מ,
$BD = AE = 2$ ס"מ, $\sphericalangle A = 57^\circ$.
חשב את שטח המרובע BDEC.

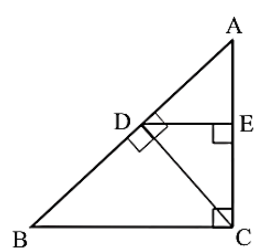


תשובה: 12.16 סמ"ר.

10. במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90^\circ)$ D היא נקודה הנמצאת על הניצב BC. נתון: $AC = m$, $\sphericalangle DAC = \alpha$, $\sphericalangle BAD = 30^\circ$.
א. הבע באמצעות m ו- α את אורך הקטע AB.
ב. נתון: $BC = m\sqrt{3}$. חשב את α.

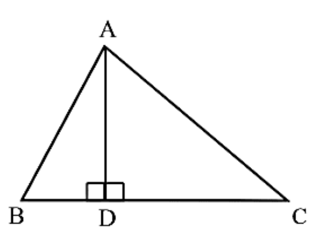
תשובה: א. $\frac{m}{\cos(\alpha + 30^\circ)}$. **ב.** 30°.

11. במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90^\circ)$,
נתון: $\sphericalangle B = \beta$, $AB = k$.
$CD \perp AB$, $DE \perp AC$.
הבע על ידי k ו- β את אורך הקטע DE.



תשובה: $k\cos\beta\sin^2\beta$.

12. AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC.
נתון: $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle CAD = 2\alpha$.
הבע באמצעות α את היחס $\frac{BD}{DC}$.

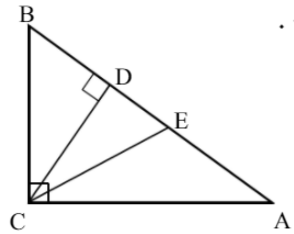


תשובה: $\frac{\tan\alpha}{\tan 2\alpha}$.

13. במשולש ישר-זווית אורך אחד הניצבים הוא b , והזווית שלידו היא α .
א. הבע את שטח המשולש באמצעות b ו- α .
ב. מצא את α אם ידוע ששטח המשולש הוא $3b^2$.

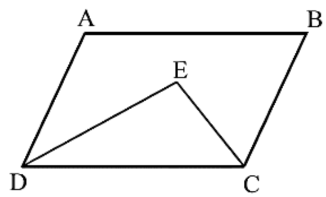
תשובה: א. $\frac{b^2 \tan\alpha}{2}$. ב. 80.54° .

14. במשולש ישר-זווית ABC $(AC \perp CB)$ נתון: $\sphericalangle A = \alpha$.
CD הוא גובה ליתר ואורכו h ,
ו- CE הוא חוצה-זווית של $\sphericalangle ACD$.
הבע את שטח המשולש CED באמצעות h ו- α .



תשובה: $\frac{1}{2}h^2 \tan(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$.

15. חוצי-הזווית D ו- C של המקבילית
$ABCD$ נחתכים בנקודה E .
א. הוכח: $\sphericalangle DEC = 90^\circ$.
ב. נתון: 14 $AB =$ ס"מ , $\sphericalangle A = 110^\circ$.
חשב את שטח המשולש DCE .

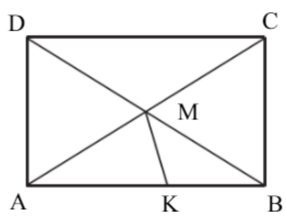


תשובה: ב. 46.04 סמ"ר.

16. אחת הצלעות במלבן ארוכה ב- 33 ס"מ מהצלע השנייה.
הזווית החדה שבין האלכסונים היא בת 58° . חשב את צלעות המלבן.

תשובה: 74.04 ס"מ, 41.04 ס"מ.

17. במלבן $ABCD$ נתון: 8.4 $AB =$ ס"מ ,
10 $AC =$ ס"מ , $AM = AK$.
חשב את אורך הקטע MK .



תשובה: 2.828 ס"מ.

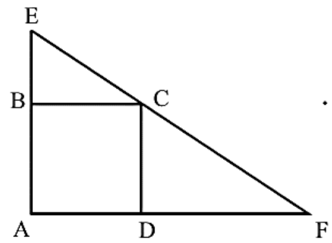
18. אורך צלעו של מעוין הוא 13 ס"מ ואלכסונו הקטן הוא 10 ס"מ.
חשב את זוויות המעוין.

תשובה: 45.24° , 134.76° .

19. אורך צלע המעוין הוא a והזווית החדה שלו היא α . הבע על ידי a ו- α
את אלכסוני המעוין ואת שטחו.

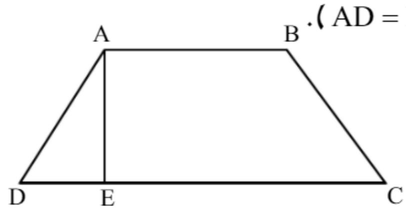
תשובה: $2a\sin\frac{\alpha}{2}$, $2a\cos\frac{\alpha}{2}$, $2a^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = a^2\sin\alpha$.

20. ABCD הוא ריבוע החסום במשולש ישר-זווית EAF ($\sphericalangle EAF = 90^\circ$), כמתואר בציור.
נתון: אורך אלכסון הריבוע הוא d, $\sphericalangle AEF = 57^\circ$.
א. הבע באמצעות d את אורך צלע הריבוע.
ב. הבע באמצעות d את שטח המשולש EAF.



תשובה: א. $0.707d$. ב. $1.047d^2$.

21. ABCD טרפז שווה-שוקיים ($AB \parallel DC$, $AD = BC$).
נתון: $AB =$ 30 ס"מ, $DC =$ 50 ס"מ,
AE הוא גובה בטרפז ואורכו 14 ס"מ.
א. חשב את הזווית D.
ב. חשב את הזווית ACD.



תשובה: א. 54.46°. ב. 19.29°.

חלק ד – פונקציות רציונליות ופונקציות שורש

קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

1. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+8x}{x^2+8}$.

א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה,
(4) נקודות חיתוך עם הצירים, (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. הפונקציה $f(x)$ היא **נגזרת** של פונקציה אחרת $g(x)$,
כלומר $g'(x)=f(x)$. בהנחה שתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$
זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$:

(1) מצא את שיעורי ה- x של הנקודות שבהן לפונקציה $g(x)$
יש נקודות קיצון וקבע את סוג הקיצון.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(3) הסבר מדוע לפונקציה $g(x)$ אין אסימפטוטה אופקית.

2. נתונה הפונקציה $f(x)=2x-4\sqrt{x+1}$.

א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
(4) נקודות חיתוך עם הצירים.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. הפונקציה $f(x)$ היא נגזרת של הפונקציה $g(x)$, כלומר $g'(x)=f(x)$.
בהנחה שתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה
של הפונקציה $f(x)$:

(1) מצא את שיעור ה- x של הנקודה על הגרף של $g(x)$ שבה שיפוע
המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ הוא 4.

(2) מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $g(x)$ וקבע את סוגן.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע $g(-1)=0$.

הזזות/ מתיחות ושיקופים

3. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2+6x}{x^2-7x+10}$.

א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים,
תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\left(f(x)\right)^2$.

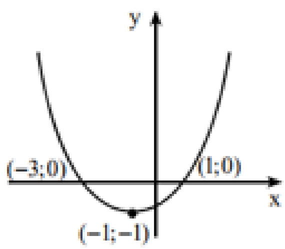
(1) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
תוכל להיעזר בסעיפים קודמים.

(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) לאילו ערכים של k, יש למשוואה $g(x)=k$ שני פתרונות?

4. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-12x^2+45x$.
א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
(4) נקודות חיתוך עם הצירים.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(-x)$. מצא עבור הפונקציה $g(x)$:
(1) נקודות קיצון. (2) תחומי עלייה וירידה.
ד. דני טוען שאם הפונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור $x=0$, אז הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f(-x)$ נפגשים על ציר ה- y . האם דני צודק?

5. בציור שלפניך מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, רציפה וגזירה לכל x . הגרף חותך את ציר ה- x בנקודות $(1;0)$ ו- $(-3;0)$.
לפונקציה נקודת קיצון אחת והיא $(-1;-1)$ מינימום.



א. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(\frac{1}{2}x)$.
(1) מהם שיעורי נקודות החיתוך עם ציר ה- x של הפונקציה $g(x)$?
(2) רשום את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוג הקיצון.
ב. השלם את הטענה כך שתהיה נכונה:
כדי לשרטט את הגרף של $g(x)=f(\frac{1}{2}x)$, לוקחים את הגרף של $f(x)$:
(1) ומחלקים ב- 2 את שיעור ה- x של כל אחת מהנקודות שעליו (מבלי לשנות את שיעור ה- y שלה).
(2) וכופלים ב- 2 את שיעור ה- x של כל אחת מהנקודות שעליו (מבלי לשנות את שיעור ה- y שלה).

בעיות נוספות:

6. ישר המשיק לגרף הפונקציה $y=\frac{x^2-3x+a}{x^2-3x+2}$ בנקודה שבה $x=-1$ חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=\frac{7}{5}$.
א. מצא את הערך של a .
ב. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עליה וירידה.
(4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. מצא לאילו ערכי x גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא מעל האסימפטוטה האופקית שלו.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x+\sqrt{x+a}}{x}$.
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=2$ הוא $-\frac{3}{8}$.
א. מצא את הערך של a.
ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת האסימפטוטות שלה המקבילות לצירים.
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ה. האם קיימת נקודה המשותפת לגרף הפונקציה ולאסימפטוטה האופקית שלו? אם כן, מצא את שיעוריה.
ו. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=3f(x)+k$. הישר $y=5$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $g(x)$. מצא את הערך של k.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+12x+32}{x^2+9x+20}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$
והראה שעבור כל $x\neq-4$ בתחום מתקיים: $f(x)=\frac{x+8}{x+5}$.
ב. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
ג. הנקודה A היא נקודת אי-רציפות סליקה ("חור") של הפונקציה $f(x)$.
(1) מצא את שיעורי הנקודה A.
(2) הראה שהישר המחבר את הנקודה A עם ראשית הצירים – חוצה את הזווית שבין הצירים.

9. נתונה שתי פונקציות: $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x+\frac{1}{x}$.
נסמן: $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$?
ב. הראה שבתחום שמצאת בסעיף א' מתקיים: $h(x)=x$.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

10. א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+4x+6}{x^2+4x+5}$.

מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
ב. נגדיר: $g(x)=f(2x)$. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוג הקיצון. היעזר בסעיף א.
ג. נגדיר: $h(x)=f(-x)$. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$ וקבע את סוג הקיצון. היעזר בסעיף א.

11. א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$.

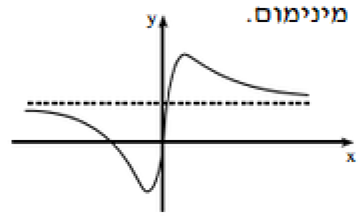
ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x}}$.

12. מצא את האסימפטוטות האופקיות של הפונקציות הבאות (אם ישנן):

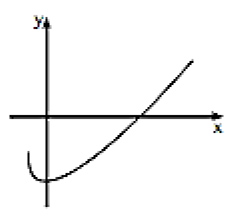
א. $y=\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$ ב. $y=\frac{\sqrt{9x^4-1}}{2x^2}$ ג. $y=\frac{\sqrt{16-x^4}}{3x^2}$

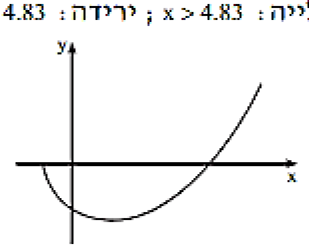
<u>תשובות לחלק ד:</u>

1. א. (1) כל x. (2) $(4;2)$ מקסימום, $(-2;-1)$ מינימום.
(3) עלייה: $-2<x<4$;
ירידה: $x>4$ או $x<-2$.
(4) $(0;0)$, $(-8;0)$. (5) $y=1$.
ג. (1) $x=0$ מינימום, $x=-8$ מקסימום.
(2) עלייה: $x>0$ או $x<-8$;
ירידה: $-8<x<0$.

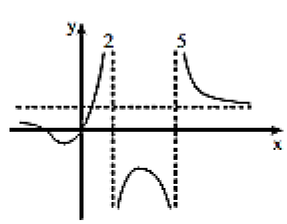


2. א. (1) $x\ge -1$.
(2) $(0,-4)$ מינימום, $(-1;-2)$ מקסימום.
(3) עלייה: $x>0$, ירידה: $-1<x<0$.
(4) $(4.83;0)$, $(0;-4)$.
ג. (1) 8. (2) $x=-1$ מקסימום, $x=4.83$ מינימום.
(3) עלייה: $x>4.83$; ירידה: $-1<x<4.83$.
(4)

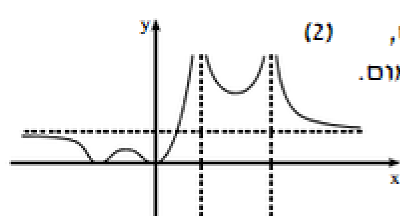




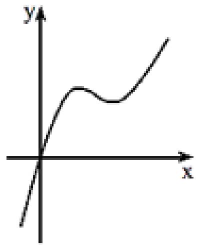
3. א. תחום הגדרה: $x\ne 2$, $x\ne 5$.
נקודות חיתוך: $(0;0)$, $(-3;0)$.
עלייה: $2<x<3$ או $-1<x<2$.
ירידה: $x>5$ או $3<x<5$ או $x<-1$.
$(3;-18)$ מקסימום, $(-1;-\frac{2}{9})$ מינימום.
אסימפטוטות: $x=2$, $x=5$, $y=2$.



ג. (1) $(3;324)$ מינימום, $(0;0)$ מינימום, (2)
$(-1;\frac{4}{81})$ מקסימום, $(-3;0)$ מינימום.
(3) $k=0$ או $\frac{4}{81}<k<4$
או $4<k<324$.

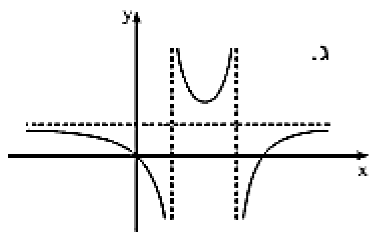


4. א. (1) כל x. (2) $(3;54)$ מקסימום, $(5;50)$ מינימום. ב.
(3) עלייה: $x>5$ או $x<3$; ירידה: $3<x<5$.
(4) $(0;0)$.
ג.(1) $(-5;50)$ מינימום, $(-3;54)$ מקסימום.
(2) עלייה: $-5<x<-3$; ירידה: $x>-3$ או $x<-5$.
ד. כן.

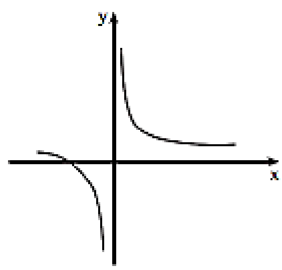


5. א. (1) $(2;0)$, $(-6;0)$. (2) $(-2;-1)$ מינימום. ב. טענה (2).

6. א. $a=0$.
ב. (1) $x\neq 2$, $x\neq 1$.
(2) $(1.5;9)$ מינימום.
(3) עלייה: $x>2$ או $1.5<x<2$;
ירידה: $1<x<1.5$ או $x<1$.
(4) $(0;0)$, $(3;0)$.
(5) $x=2$, $x=1$, $y=1$. ד. $1<x<2$.
ג.

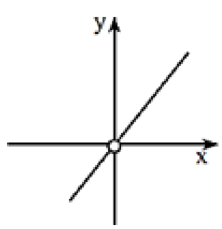


7. א. 2.
ב. תחום הגדרה: $x\geq -2$, $x\neq 0$.
אסימפטוטות: $x=0$, $y=1$.
ג. $(-2;1)$ מקסימום.
ה. כן, $(-2;1)$.
ו. 2.



8. א. $x\neq -4$, $x\neq -5$. ב. $x=-5$, $y=1$. ג. $A(-4;4)$.

9. א. $x\neq 0$. ג.



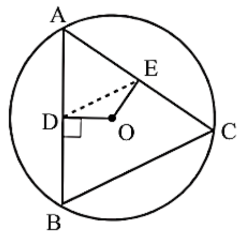
10. א. $(-2;2)$ מקסימום. ב. $(-1;2)$ מקסימום. ג. $(2;2)$ מקסימום.

11. א. $x\geq 2$. ב. $x\geq 2$ או $x<0$.

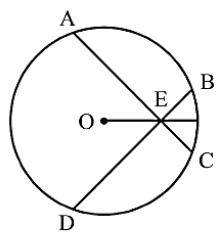
12. א. $y=1$. ב. $y=1.5$. ג. אין.

חלק ה (חדש) – נספח לגאומטריה מעגל: תרגול מדורג

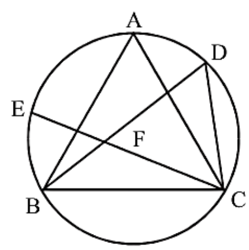
.1 המשולש ABC חסום במעגל
שמרכזו בנקודה O.
נתון: $OD \perp AB$, $DE \parallel BC$.
הוכח: $OE \perp AC$.



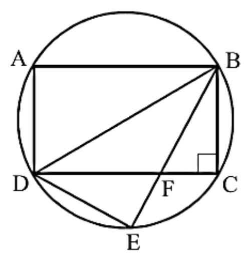
.2 AC ו- BD הם שני מיתרים שווים הנפגשים
בנקודה E. O – מרכז המעגל.
א. הוכח: OE חוצה את הזווית AED.
ב. הוכח: המשך הקטע OE מאונך למיתר AD.



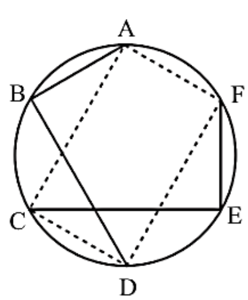
.3 המשולש ABC הוא משולש שווה-צלעות
החסום במעגל. הנקודות D ו- E נמצאות
על היקף המעגל כך ש- $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{DC}$.
BD ו- CE נחתכים בנקודה F.
הוכח: המשולש CDF
הוא שווה-צלעות.



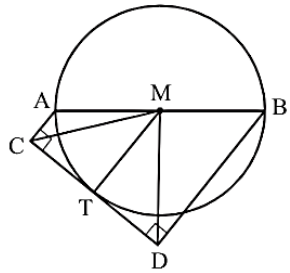
.4 המלבן $ABCD$ חסום במעגל.
E היא נקודה על הקשת DC
כך ש- $\sphericalangle ABD = \sphericalangle EBD$.
א. הוכח: $AB = BE$.
ב. הוכח: $DE = BC$.



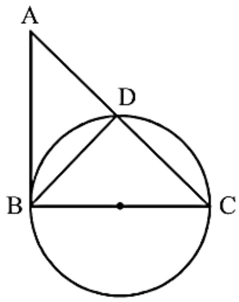
.5 הנקודות A, B, C, D, E ו- F
נמצאות על היקפו של מעגל.
נתון: $AB \perp BD$, $CE \perp EF$.
הוכח: המרובע $ACDF$ הוא מלבן.



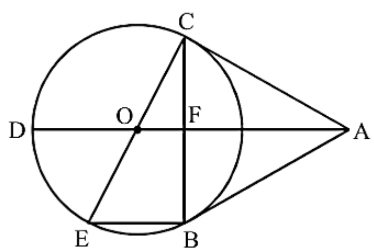
6. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו M.
הישר CD משיק למעגל בנקודה T.
נתון: $AC \perp CD$, $BD \perp CD$.
א. הוכח: $TM = \frac{AC+BD}{2}$.
ב. הוכח: $MC = MD$.



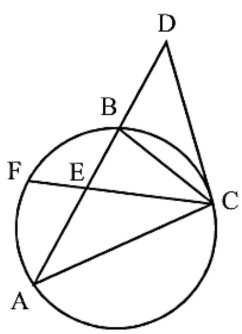
7. BC הוא קוטר במעגל.
AC חותך את המעגל בנקודה D.
נתון: $\sphericalangle C = \sphericalangle ABD$.
הוכח: AB משיק למעגל בנקודה B.



8. מנקודה A יוצאים משיקים AB ו- AC למעגל O. AD הוא חותך העובר דרך הנקודה O. המשך הרדיוס CO חותך את המעגל בנקודה E.
AD ו- BC נפגשים בנקודה F.
א. הוכח: $AO \parallel BE$.
ב. הוכח: $BE = 2OF$



9. המשולש ABC חסום במעגל. המשיק למעגל בנקודה C והמשך המיתר AB נפגשים בנקודה D. E היא נקודה על המיתר AB. נתון: $DC = DE$.
הוכח: $AF = BF$.



10. המשולש ABC הוא שווה-צלעות.
D , E ו- F הן אמצעי הצלעות AC , BC ו- AB בהתאמה.
המשולש DEC חסום במעגל.
הוכח: הישר EF משיק למעגל בנקודה E.